



Matemática Discreta  
Desigualdades

T. Praciano-Pereira

alun@:

6 de maio de 2013

Documento escrito com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Lista número 5

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

Univ. Estadual Vale do Acaraú

Debian/Gnu/Linux

www.matematica-discreta.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

**Exercícios 1 ( )** *Desigualdades objetivo: Os princípios da contagem*

**palavras chave:** *desigualdades, princípio da indução finita, princípio do pombo.*

*O princípio da Indução Finita, de fato os axiomas de Peano para os números naturais  $\mathbf{N}$ , estabelece que*

Se (**hipóteses**)

1.  $P(n_0)$  for verdadeira;

2.  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ;

então (**tese**)  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n > n_0$ .

1.

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  O número combinatório  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$  O número combinatório  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$   $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$   $(1+j)^{12} = \sum_{k=0}^{12} j^k$ ;

Se  $C$  for o seu depósito na caderneta de poupança feito no dia 01 de janeiro de 2012, então hoje, domingo, 28 de Abril de 2013, você tem  $C(1+j)^{15}$ ;  $j = 0.5/100$  mas, se você tiver tomado um empréstimo

bancário no valor  $C$ , em janeiro de 2012, e não tendo feito nenhuma amortização neste período, sua dívida hoje seria

$$j = 7/100; \quad (1)$$

$$C(1+j)^{15} = \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^{15} j^k = 1 + \binom{15}{1}j + \binom{15}{2}j^2 + \dots + j^{15}; \quad (3)$$

2. *princípio das casas de pombos* Na praça há cerca de cinquenta pombos e um vizinho montou um pombal com duzentas casinhas em cada uma das quais cabe exatamente um pombo.

*O vizinho conhece o princípio do pombo: se mais do que  $n$  objetos forem distribuídos por  $n$  casinhas, então haverá mais de um objeto em alguma das casinhas.*

*Entretanto, pombos não são facilmente controláveis...*

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  *O vizinho pode avaliar o crescimento da população de pombos, ao longo do tempo.*

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$  *Quando houver mais do que 200 pombos os excedentes ficarão pendurados no suporte do pombal.*

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$  *Quando houver mais do que 200 pombos haverá mais de um pombo por casinha, mas isto não garante que todas fiquem ocupadas.*

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$  *Quando houver mais do que 200 pombos haverá mais de um pombo por casinha e assim se garante que todas fiquem ocupadas.*

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$  *O princípio do pombal* Se  $\text{card}(A) = n$  e  $\text{card}(B) = m < n$  então a função  $A \xrightarrow{f} B$  não pode ser injetiva.

3. Enumeração

(a)  $(V)[ ](F)[ ]$  O conjunto  $\text{card}(A) = 10$  e  $\text{card}(B) = 15$  então

$$\text{card}(A \cup B) = 20;$$

(b)  $(V)[ ](F)[ ]$  O conjunto  $\text{card}(A) = 10$  e  $\text{card}(B) = 15$  então

$$\text{card}(A \cup B) = 20 - \text{card}(A \cap B);$$

(c)  $(V)[ ](F)[ ]$  Na turma há 10 torcedoras do Ceará e 15 torcedoras do Fortaleza portanto há 25 alunas na turma.

(d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Na turma há 10 torcedoras do Ceará e 15 torcedoras do Fortaleza portanto há no máximo 25 alunas na turma.

(e)  $(V)[ ](F)[ ]$  Na turma há 10 torcedoras do Ceará e 15 torcedoras do Fortaleza e cinco que toquem por quem ganhar, portanto há 20 alunas na turma.

4. Fator primo, fatoração

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $n$  for par então  $n^2 = 4m^2$  em que  $m$  é um divisor de  $n$ .
- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $n$  for múltiplo de 3 então  $n^2 = 9m^2$  em que  $m$  é um divisor de  $n$ .
- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $\frac{p}{q}$  for irredutível então  $(\frac{p}{q})^2$  será também irredutível.
- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $\frac{p}{q}$  for irredutível então  $(\frac{p}{q})^m$  será também irredutível qualquer que seja o inteiro estritamente positivo  $m$ .
- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\sqrt{2}$  não é um número racional. E  $\sqrt{n}$  é irracional ou é inteiro.

5. Múltiplos e divisores

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $d = \text{MDC}(a, b)$  então  $d$  divide  $a$  e  $d$  divide  $b$ . Se houver outro divisor comum,  $p$ , de  $a, b$  então  $p < d$ .
- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $d = \text{MDC}(a, b)$  então  $d$  divide  $a$  e  $d$  divide  $b$ . além disto não pode haver outro divisor comum,  $p$ , de  $a, b$ .
- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $d = \text{MDC}(a, b)$  então  $d$  divide  $a$  e  $d$  divide  $b$ . Se houver outro divisor comum,  $p$  de  $a, b$  então  $d < p$ .
- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Para somar duas frações  $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}$  encontramos  $p = \text{MDC}(n, b)$  e escrevemos duas outras frações equivalentes às primeiras, com denominador  $p$ , que podem então ser facilmente somadas.
- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Para somar duas frações  $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}$  encontramos  $p = \text{MMC}(n, b)$  e escrevemos duas outras frações equivalentes às primeiras, com denominador  $p$ , que podem então ser facilmente somadas.

6. Enumeração O princípio de Bertrand

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Para cada número inteiro positivo (número natural)  $n$  tem um número primo  $p$  tal que  $n < p < 2n$
- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Para cada número inteiro positivo (número natural)  $n$  tem um número primo  $p$  tal que  $n \leq p < 2n$
- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Para cada número inteiro estritamente positivo  $n$  tem um número primo  $p$  tal que  $n \leq p \leq 2n$
- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$
- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$

7. **Definição:**  $a \equiv b(\text{mod } m)$  se deixarem mesmo resto na divisão por  $m$  e dizemos que  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $m$ .

Congruência

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $a \equiv b(\text{mod } m)$  se e somente se  $b \equiv a(\text{mod } m)$ .

- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $a \equiv a(\text{mod } m)$ .

- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $a \equiv b(\text{mod } m)$  e  $b \equiv c(\text{mod } m)$  então  $a \equiv c(\text{mod } m)$ .

- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $a \equiv b(\text{mod } m)$  e  $c \equiv d(\text{mod } m)$  então  $ac \equiv bd(\text{mod } m)$

- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $a \equiv b(\text{mod } m)$  e  $c \equiv d(\text{mod } m)$  então

$$ax + cy \equiv bx + dy(\text{mod } m)$$

para quaisquer que sejam os inteiros  $x, y$ .

8. A função de Euler se define como

$$\phi(n) = \text{card}(\{m; m < n; (m, n) = 1\});$$

em que o símbolo  $(m, n)$  significa “ $m$  é primo com  $n$ ”.

Função de Euler

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\phi(10) = 1$

- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\phi(10) = 2$

- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\phi(10) = 3$

- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\phi(10) = 4$

- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $\phi(10) = 5$

9. A função  $[x]$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ .

O maior inteiro

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $[x + m] = [x] + m$  para todo inteiro  $m$

- (b)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $[x] + [y] \leq [x + y]$

- (c)  $(V)[\ ](F)[\ ]$   $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$

- (d)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $a$  for um inteiro o número de inteiro positivos

$$n \leq x; n \text{ divisível por } a$$

é  $[x/a]$  que nunca pode ser zero.

- (e)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  Se  $a$  for um inteiro o número de inteiro positivos

$$n \leq x; n \text{ divisível por } a$$

é  $[x/a]$  e pode ser zero.

10.

Um número  $n$  é dito triangular se houver um inteiro positivo  $m$  tal que

$$n = 1 + 2 + \dots + m$$

- (a)  $(V)[\ ](F)[\ ]$  1 é triangular.

(b)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  2 é triangular.

(c)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  3 é triangular.

(d)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  5 é triangular

(e)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  A função LISP

```
(defun triangular (m k soma)
  (if (= k m) soma
      (triangular m (+ k 1) (+ soma k))
      )
  )
)
```

encontra o número triangular associado ao número inteiro positivo  $m$  se for chamada de forma adequada...