Matemática Discreta
Produto Cartesiano
T. Praciano-Pereira

Lista numero 02
tarcisio.praciano@gmail.com
Dep. de Computação

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú

26 de março de 2013

produzido com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux
http://www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Conjuntos - produto cartesiano*
objetivo: Programando produto cartesiano
palavras chave: *estrutura com chaves, produto cartesiano de conjuntos, programas em LISP.*

1. *Produto cartesiano*

$$A = \{1,2,3\}\ ;\ B = \{a,e,i,o,u\}\ ;\ C = \{1,2,3,4,5\}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] $(1.2) \in A \text{ x } B$
   (b) (V)[ ](F)[ ] *Se* $(x,y) \in A \text{ x } B$ *então também* $(y,x) \in A \text{ x } B$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $A \text{ x } A = C \text{ x } C$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $A \text{ x } B = B \text{ x } A$
   (e) (V)[ ](F)[ ] $(a,2) \in C \text{ x } B$

2. *Produto cartesiano*

$$A = \{1,2,3\}\ ;\ B = \{a,e,i,o,u\}\ ;\ C = \{1,2,3,4,5\}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] *É possível construir (definir) uma função injetora*

$$C \longrightarrow A$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] *É possível construir (definir) uma função injetora*

$$A \longrightarrow C$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] *É possível construir (definir) uma função sobrejetora*

$$A \longrightarrow C$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] *É possível construir (definir) uma função sobrejetora*

$$C \longrightarrow A$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] *É possível construir (definir) uma função injetora*

$$C \longrightarrow A \text{ x } C$$

   e isto nos permite identificar o conjunto A *com um subconjunto de* $A \text{ x } C$*. Isto pode ser feito de 3 maneiras "naturais" diferentes (pelo menos).*

3. *Conjuntos*
   $E = \{x; x \in \mathbf{N}; x < 20\}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] *Se* $x \in E$ *então* $x+1 \in E$.
   (b) (V)[ ](F)[ ] *O conjunto* $\mathcal{E} = \{(x,y); x \in E; y = 1\}$ *é* numericamente equivalente *ao conjunto* E *o que significa que é possível estabelcer (definir) tanto uma função injetora como uma função sobrejetora* $E \longrightarrow \mathcal{E}$ *e portanto uma função bijetora* $E \longrightarrow \mathcal{E}$*. Podemos dizer que* $\mathcal{E}$ *é uma imagem de* E *em* $E \text{ x } E$.
   (c) (V)[ ](F)[ ] *Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto no que diz respeito à cor como ao modelo.. Ela pode pode sair 30 dias seguidos com roupa diferente.*
   (d) (V)[ ](F)[ ] *Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto* no que diz respeito à cor como ao modelo.. *Ela pode pode sair 60 dias seguidos com roupa diferente.*
   (e) (V)[ ](F)[ ] *Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto no que diz respeito à cor como ao modelo. Um algoritmo para que ela, facilmente, monte o seu* plano estratégico *de uso das roupas seria uma ordenação do produto cartesiano* $B \text{ x } C$ *em que* B *é o conjunto das blusas e* C *é o conjunto das calças jeans:* `(sort` $B \text{ x } C$`)`.

4. *Produto cartesiano*

$$A = \{1,2,3\}\ ;\ B = \{a,e,i,o,u\}\ ;\ C = \{1,2,3,4,5\}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] *Distributividade do produto cartesiano relativamente à união de conjuntos é verdadeira,*

$$(A \cup B) \text{ x } C = A \cup C \text{ x } B \cup C$$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Distributividade do produto cartesiano relativamente à interseção de conjuntos é verdadeira,*

$$(A \cap B) \ \text{ x } \ C = A \cap C \ \text{ x } \ B \cap C$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $A \ \text{ x } \ \{\ \} = \{\ \}$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $(A \ \text{ x } \ B) \ \text{ x } \ C = A \ \text{ x } \ (B \ \text{ x } \ C)$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O produto cartesiano é associativo,*

$$A \subset B \ \Rightarrow \ A \ \text{ x } \ C \subset B \ \text{ x } \ C$$

5. *O operador* partes de *produz o conjunto "das partes" de um conjunto dado, quer dizer, o conjunto de todos os conjuntos do parâmetro que passarmos para este operador. É um operador que está definido numa classe de conjuntos.*

   <u>*Notação*</u> $\mathbf{P}(A)$ *é o operador "*partes de*" aplicado ao conjunto A.*

   Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

   <u>*Operador* Partes de</u>

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $A \subset \mathbf{P}(A)$

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $A \in \mathbf{P}(A)$

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\emptyset \in \mathbf{P}(A)$ *qualquer que seja o conjunto A.*

   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\emptyset \in \mathbf{P}(\emptyset)$ *mostra que existe uma exceção à regra:*
   "$A \subset \mathbf{P}(A)$ *é sempre falso!*
   Existe um conjunto A tal que $A \subset \mathbf{P}(A)$ *pode ser verdadeiro. Mas, se*

   - $A \subset \mathbf{P}(A)$ *é verdade*
   - $A \in \mathbf{P}(A)$ *é verdade*

   então $A = \emptyset$.

   (e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Não ha exceções à regra*
   "$A \subset \mathbf{P}(A)$ *é sempre falso!*

6. <u>*Operador* Partes de</u>

   Mesma notação da questão anterior.

   A operação partes de *produz elementos mais complexos (complexidade no sentido da computação) o que torna quase sempre falso* $A \subset \mathbf{P}(A)$ *ou melhor verdadeiro num único caso.* $\mathbf{P}(A)$ *é mais complexo que A então os elementos de A não aparecem em* $\mathbf{P}(A)$ *com uma única exceção:* $A = \emptyset$.

   card *é um operador que generaliza a contagem de elementos. Se um conjunto A for finito então card(A) é o número de elementos de A, se A não for finito card(A) classifica A quanto a sua complexidade.* $\mathbf{N}$ *é o primeiro e o mais simples dos conjuntos infinitos, qualquer outro conjunto infinito,*

que não seja equivalente a $\mathbf{N}$*, é mais complexo que* $\mathbf{N}$ *e portanto é equivalente a* $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ *ou* $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{N}))\ldots$

Entretanto quando aplicado a conjuntos finitos $\mathbf{P}$ *apenas produz conjuntos com mais elementos, ainda finitos, logo "simples" (não complexos).*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $A = \emptyset$ *então* $card(\mathbf{P}(A)) = 1$.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $card(A) = 1$ *então* $card(\mathbf{P}(A)) = 2$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $card(A) = 2$ *então* $card(\mathbf{P}(A)) = 4$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $card(A) = 3$ *então* $card(\mathbf{P}(A)) = 8$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $card(A) = 4$ *então* $card(\mathbf{P}(A)) = 16$

Isto leva a conjectura de Cantor do salto da cardinalidade que se encontra sugerida no texto inicial desta questão. Não há nada entre $\mathbf{N}$ *e* $\mathbf{P}(\mathbf{N})$*. Se um conjunto A for finito, entre A e* $\mathbf{P}(A)$ *podem existir vários conjuntos, "podem" porque há uma exceção ...*

Observe que tive que trabalhar com a sucessão de conjuntos:

- $A = \emptyset$
- $A = \{0\}$
- $A = \{0, 1\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- ...

e o resultado é a construção do Triângulo de Pascal.

7. *Leia sobre este assunto no capítulo 2 do livro* Introdução à Matemática Universitária. *A indução finita é um método de demonstração mas também é uma forma de compreender como funciona a recursão. Básicamente ela diz que "se* $P(n)$ *e* $P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1)$ *forem verdadeiros então* $P(n)$ *é verdadeiro para todo* $n \in \mathbf{N}$ *a partir de um ponto inicial,* $P(n_0)$ *que seja verdadeiro".*

   <u>*Indução finita*</u>

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A soma dos n primeiros números naturais é* $\frac{(n+1)n}{2}$

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ] *A soma dos n primeiros números naturais é expressa por um polinômio*</u> *do terceiro grau.*

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se P for um polinômio do grau n então*

   $$Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

   é um polinômio do grau $n - 1$.

(d) (V)[ ](F)[ ] *Se P for um polinômio do grau n então*

$$Q(x) = P(x+a) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n-1$ *sendo* $a \in \mathbf{N}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] *Se P for um polinômio do grau n então*

$$Q(x) = P(x+a) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n-1$ *qualquer que seja o número a.*

8. *Indução finita*

(a) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é*

$$\sum_{k=0}^{n} P(k); P(x) = x^2$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

```
(defun soma (n k Soma)
     (if (= n k) Soma
               (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma))
     )
)
```

calcula a soma $P(1) + \ldots + P(n-1)$

(c) (V)[ ](F)[ ]

```
(defun soma (n k Soma)
     (if (= n k) Soma
               (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma))
     )
)
```

calcula a soma $P(1) + \ldots + P(n)$

(d) (V)[ ](F)[ ]

```
(defun soma (n k Soma)
     (if (= n k) Soma
               (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma))
     )
)
```

calcula a soma dos termos de uma p.a. se P for um polinômio do grau 1.

(e) (V)[ ](F)[ ] *Como* $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ *é um polinômio de grau* $n-1$ *quando P for de grau n então*

$$\sum_{k=1}^{n} Q(k) = P(n+1) - P(1)$$

nos fornece uma fórmula para calcularmos qualquer que seja a soma de potências de números naturais.

9. *Indução finita*

(a) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos n primeiros números ímpares é* n^2.

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = (\sum_{k=0}^{n-1} k)^2$$

10. *Indução finita*

(a) (V)[ ](F)[ ] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{6(n-2)!}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{6(n-3)!}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{(n-3)!}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)!}$