



Matemática Discreta
Produto Cartesiano

T. Praciano-Pereira

alun@:

Lista numero 02

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

Univ. Estadual Vale do Acaraú

26 de março de 2013

produzido com L^AT_EX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

<http://www.multivariado.sobralmatematica.org>

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Conjuntos - produto cartesiano*

objetivo: Programando produto cartesiano

palavras chave: estrutura com chaves, produto cartesiano de conjuntos, programas em LISP.

1. Produto cartesiano

$$A = \{1, 2, 3\} ; B = \{a, e, i, o, u\} ; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- (a) (V)[](F)[] $(1,2) \in A \times B$
(b) (V)[](F)[] Se $(x, y) \in A \times B$ então também $(y, x) \in A \times B$
(c) (V)[](F)[] $A \times A = C \times C$
(d) (V)[](F)[] $A \times B = B \times A$
(e) (V)[](F)[] $(a, 2) \in C \times B$

2. Produto cartesiano

$$A = \{1, 2, 3\} ; B = \{a, e, i, o, u\} ; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- (a) (V)[](F)[] É possível construir (definir) uma função injetora

$$C \longrightarrow A$$

- (b) (V)[](F)[] É possível construir (definir) uma função injetora

$$A \longrightarrow C$$

(c) (V)[](F)[] É possível construir (definir) uma função sobrejetora

$$A \rightarrow C$$

(d) (V)[](F)[] É possível construir (definir) uma função sobrejetora

$$C \rightarrow A$$

(e) (V)[](F)[] É possível construir (definir) uma função injetora

$$C \rightarrow A \times C$$

e isto nos permite identificar o conjunto A com um subconjunto de $A \times C$. Isto pode ser feito de 3 maneiras “naturais” diferentes (pelo menos).

3. Conjuntos

$$E = \{x; x \in \mathbf{N}; x < 20\}$$

(a) (V)[](F)[] Se $x \in E$ então $x + 1 \in E$.

(b) (V)[](F)[] O conjunto $\mathcal{E} = \{(x, y); x \in E; y = 1\}$ é numericamente equivalente ao conjunto E o que significa que é possível estabelecer (definir) tanto uma função injetora como uma função sobrejetora $E \rightarrow \mathcal{E}$ e portanto uma função bijetora $E \rightarrow \mathcal{E}$. Podemos dizer que \mathcal{E} é uma imagem de E em $E \times E$.

(c) (V)[](F)[] Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto no que diz respeito à cor como ao modelo.. Ela pode sair 30 dias seguidos com roupa diferente.

(d) (V)[](F)[] Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto no que diz respeito à cor como ao modelo.. Ela pode sair 60 dias seguidos com roupa diferente.

(e) (V)[](F)[] Uma garota tem 12 blusas e 5 calças jeans todas diferentes, tanto no que diz respeito à cor como ao modelo. Um algoritmo para que ela, facilmente, monte o seu plano estratégico de uso das roupas seria uma ordenação do produto cartesiano $B \times C$ em que B é o conjunto das blusas e C é o conjunto das calças jeans: (sort $B \times C$).

4. Produto cartesiano

$$A = \{1, 2, 3\}; B = \{a, e, i, o, u\}; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(a) (V)[](F)[] Distributividade do produto cartesiano relativamente à união de conjuntos é verdadeira,

$$(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$$

(b) (V)[](F)[] Distributividade do produto cartesiano relativamente à interseção de conjuntos é verdadeira,

$$(A \cap B) \times C = A \cap C \times B \cap C$$

(c) (V)[](F)[] $A \times \{ \} = \{ \}$

(d) (V)[](F)[] $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

(e) (V)[](F)[] O produto cartesiano é associativo,

$$A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$$

5. O operador partes de produz o conjunto “das partes” de um conjunto dado, quer dizer, o conjunto de todos os conjuntos do parâmetro que passarmos para este operador. É um operador que está definido numa classe de conjuntos.

Notação $\mathbf{P}(A)$ é o operador “partes de” aplicado ao conjunto A .

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

Operador Partes de

(a) (V)[](F)[] $A \subset \mathbf{P}(A)$

(b) (V)[](F)[] $A \in \mathbf{P}(A)$

(c) (V)[](F)[] $\emptyset \in \mathbf{P}(A)$ qualquer que seja o conjunto A .

(d) (V)[](F)[] $\emptyset \in \mathbf{P}(\emptyset)$ mostra que existe uma exceção à regra:

“ $A \subset \mathbf{P}(A)$ é sempre falso!”

Existe um conjunto A tal que $A \subset \mathbf{P}(A)$ pode ser verdadeiro. Mas, se

- $A \subset \mathbf{P}(A)$ é verdade
- $A \in \mathbf{P}(A)$ é verdade

então $A = \emptyset$.

(e) (V)[](F)[] Não ha exceções à regra

“ $A \subset \mathbf{P}(A)$ é sempre falso!”

6. Operador Partes de

Mesma notação da questão anterior.

A operação partes de produz elementos mais complexos (complexidade no sentido da computação) o que torna quase sempre falso $A \subset \mathbf{P}(A)$ ou melhor verdadeiro num único caso. $\mathbf{P}(A)$ é mais complexo que A então os elementos de A não aparecem em $\mathbf{P}(A)$ com uma única exceção: $A = \emptyset$.

card é um operador que generaliza a contagem de elementos. Se um conjunto A for finito então $\text{card}(A)$ é o número de elementos de A , se A não for finito $\text{card}(A)$ classifica A quanto a sua complexidade. \mathbf{N} é o primeiro e o mais simples dos conjuntos infinitos, qualquer outro conjunto infinito,

que não seja equivalente a \mathbf{N} , é mais complexo que \mathbf{N} e portanto é equivalente a $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ ou $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{N})) \dots$

Entretanto quando aplicado a conjuntos finitos \mathbf{P} apenas produz conjuntos com mais elementos, ainda finitos, logo “simples” (não complexos).

- (a) $(V)[](F)[]$ Se $A = \emptyset$ então $\text{card}(\mathbf{P}(A)) = 1$.
- (b) $(V)[](F)[]$ Se $\text{card}(A) = 1$ então $\text{card}(\mathbf{P}(A)) = 2$
- (c) $(V)[](F)[]$ Se $\text{card}(A) = 2$ então $\text{card}(\mathbf{P}(A)) = 4$
- (d) $(V)[](F)[]$ Se $\text{card}(A) = 3$ então $\text{card}(\mathbf{P}(A)) = 8$
- (e) $(V)[](F)[]$ Se $\text{card}(A) = 4$ então $\text{card}(\mathbf{P}(A)) = 16$

Isto leva a conjectura de Cantor do salto da cardinalidade que se encontra sugerida no texto inicial desta questão. Não há nada entre \mathbf{N} e $\mathbf{P}(\mathbf{N})$. Se um conjunto A for finito, entre A e $\mathbf{P}(A)$ podem existir vários conjuntos, “podem” porque há uma exceção ...

Observe que tive que trabalhar com a sucessão de conjuntos:

- $A = \emptyset$
- $A = \{0\}$
- $A = \{0, 1\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- ...

e o resultado é a construção do Triângulo de Pascal.

7. Leia sobre este assunto no capítulo 2 do livro Introdução à Matemática Universitária. A indução finita é um método de demonstração mas também é uma forma de compreender como funciona a recursão. Basicamente ela diz que “se $P(n)$ e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ forem verdadeiros então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbf{N}$ a partir de um ponto inicial, $P(n_0)$ que seja verdadeiro”.

Indução finita

- (a) $(V)[](F)[]$ A soma dos n primeiros números naturais é $\frac{(n+1)n}{2}$
- (b) $(V)[](F)[]$ A soma dos n primeiros números naturais é expressa por um polinômio do terceiro grau.
- (c) $(V)[](F)[]$ Se P for um polinômio do grau n então

$$Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n - 1$.

(d) (V)[](F)[] Se P for um polinômio do grau n então

$$Q(x) = P(x + a) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n - 1$ sendo $a \in \mathbf{N}$.

(e) (V)[](F)[] Se P for um polinômio do grau n então

$$Q(x) = P(x + a) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n - 1$ qualquer que seja o número a .

8. Indução finita

(a) (V)[](F)[] A soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é

$$\sum_{k=0}^n P(k); P(x) = x^2$$

(b) (V)[](F)[]

```
(defun soma (n k Soma)
  (if (= n k) Soma
      (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma)))
  )
)
```

calcula a soma $P(1) + \dots + P(n - 1)$

(c) (V)[](F)[]

```
(defun soma (n k Soma)
  (if (= n k) Soma
      (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma)))
  )
)
```

calcula a soma $P(1) + \dots + P(n)$

(d) (V)[](F)[]

```
(defun soma (n k Soma)
  (if (= n k) Soma
      (+ Soma (P k) (soma n (+ k 1) Soma)))
  )
)
```

calcula a soma dos termos de uma p.a. se P for um polinômio do grau 1.

(e) (V)[](F)[] Como $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ quando P for de grau n então

$$\sum_{k=1}^n Q(k) = P(n + 1) - P(1)$$

nos fornece uma fórmula para calcularmos qualquer que seja a soma de potências de números naturais.

9. Indução finita

(a) (V)[](F)[] A soma dos n primeiros números ímpares é n^2 .

(b) (V)[](F)[]

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) (V)[](F)[]

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

(d) (V)[](F)[]

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

(e) (V)[](F)[]

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2$$

10. Indução finita

(a) (V)[](F)[] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{6(n-2)!}$

(b) (V)[](F)[] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{6(n-3)!}$

(c) (V)[](F)[] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{(n-3)!}$

(d) (V)[](F)[] $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

(e) (V)[](F)[] $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)!}$